



Wykład 1

# Wprowadzenie do WK1

## Stan naprężenia

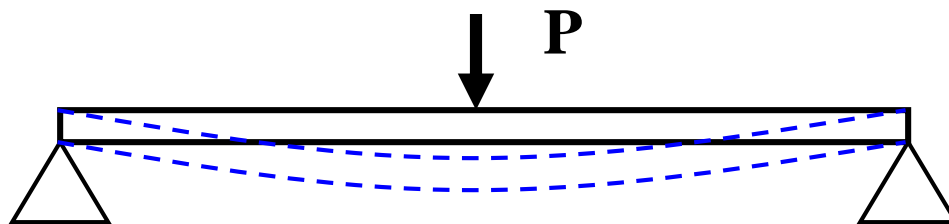
Płaski stan naprężenia

# Wytrzymałość Konstrukcji

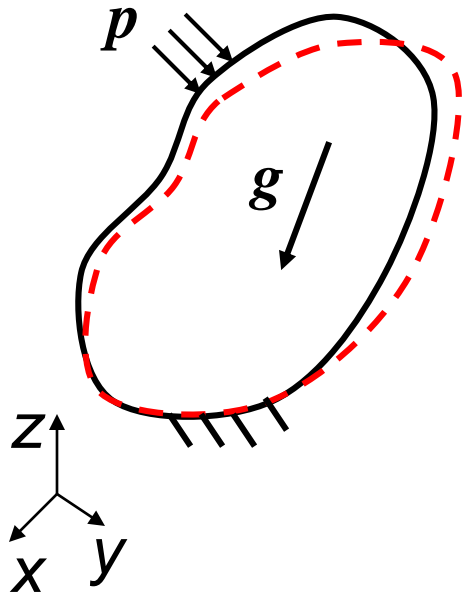
*(Wytrzymałość materiałów, Mechanika konstrukcji)*

Nauka o trwałości spotykanych w praktyce typowych elementów konstrukcji pod działaniem sił

Doświadczenie: pod działaniem sił wszystkie ciała stałe odkształcają się.



**Ciało stałe + siły** → **odkształcenia** → **zniszczenie ?**  
(ustrój, element maszyny) (zmiana kształtu)



**Zjawiska odkształcenia i zniszczenia ciała zależą od:**

- 1) Rodzaju materiału (*stal, szkło itp.*) i jego stanu (*rodzaj obróbki mechanicznej, cieplnej, chemicznej*)
- 2) Kształtu i wymiarów (*wał maszyny, zbiornik gazu itp.*)
- 3) Rodzaju i wartości sił (*ciśnienie gazu, ciężar itp.*) i ich przebiegu w czasie (*stałe lub zmienne*)
- 4) Innych oddziaływań (*temperatura, promieniowanie itp.*)

**Zadania WK:**

- 1) Określenie wytrzymałości (*odporności na zniszczenie*)
- 2) Określenie podatności (*odkształcenia*)

**Cel WK → Kontrola i kształtowanie**

**Prostota!** Nacisk na stronę praktyczną (*przesłanki doświad. i teoretyczne*)

**Teoria plastyczności i Teoria sprężystości** – bliskie WK, ale złożony aparat

## Uproszczony model ciała (model konstrukcji)

**Rzeczywisty obiekt**



**schemat obliczeniowy**

(Istotne cechy)

**Model materiału**



**odstępujemy od mikrostruktury**

~~Zmiany odległ. międzyatomowych~~

~~Zjawiska molekularne~~

~~$10^{20}$ - $10^{30}$  atomów~~

1) ciągły (*continuum*)

2) jednorodny (*uśredniony*)

3) izotropowy (*właściwości nie zależą od kierunków*)

4) zwykła liniowa sprężystość

**Kształt i wymiary**



**typowe elementy geometrii**

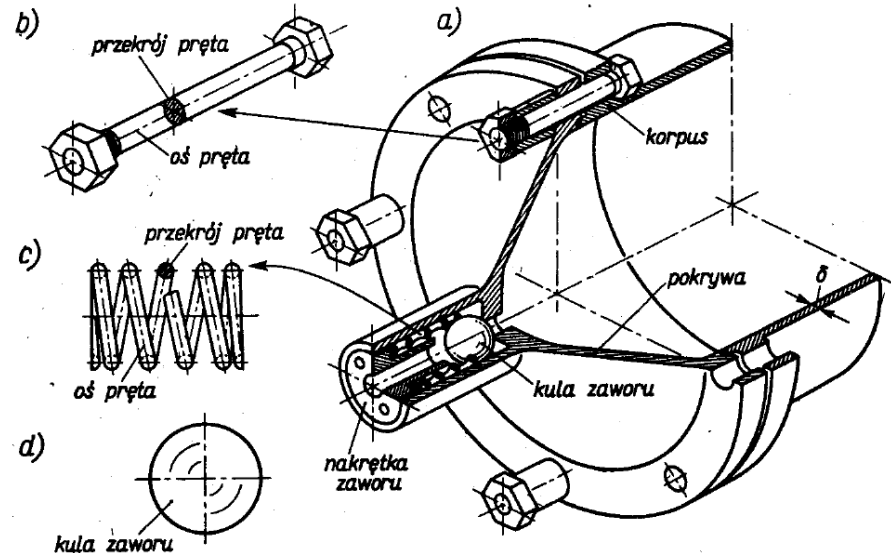
1) pręty

2) tarcze

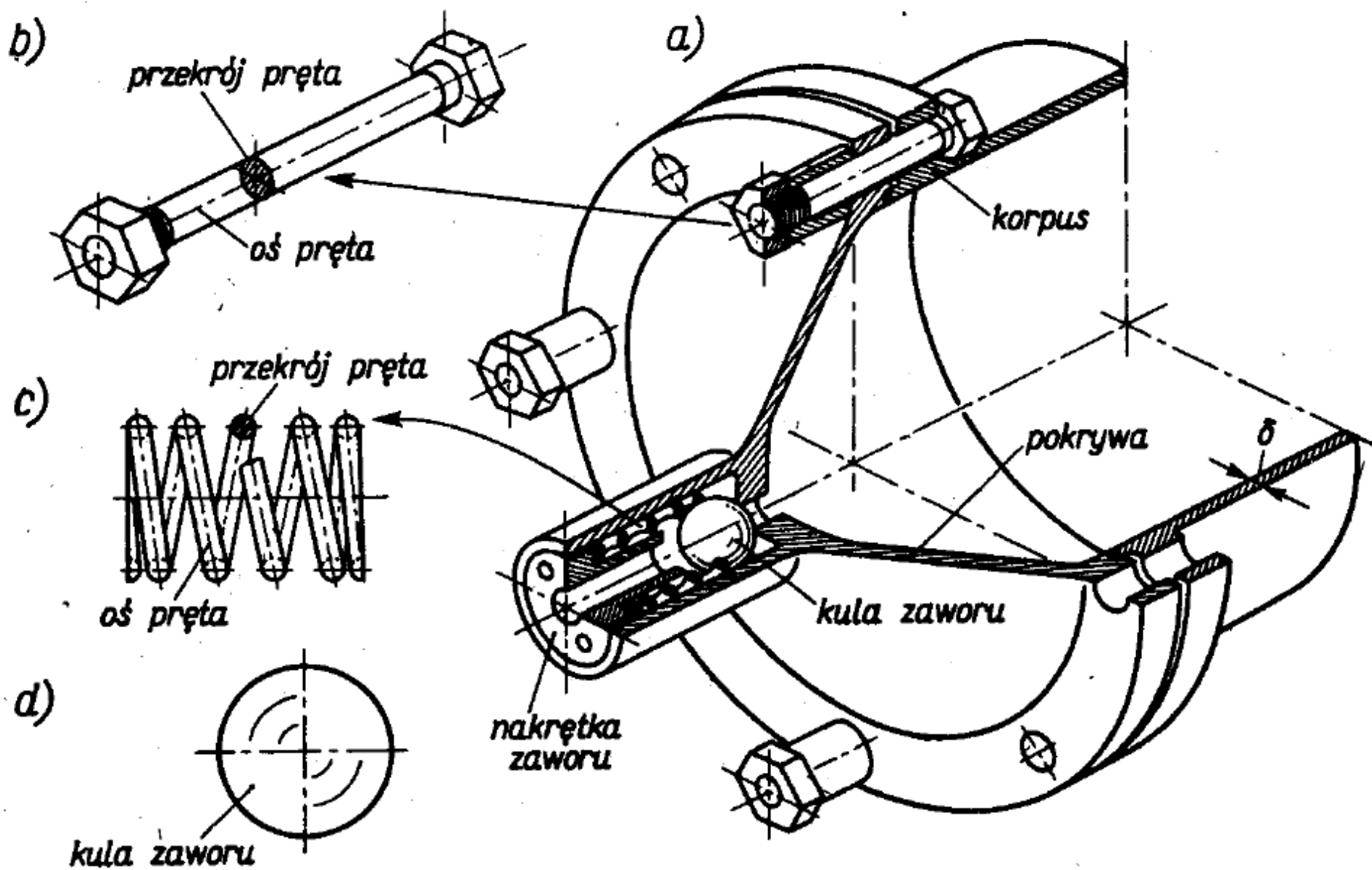
3) płyty

4) powłoki

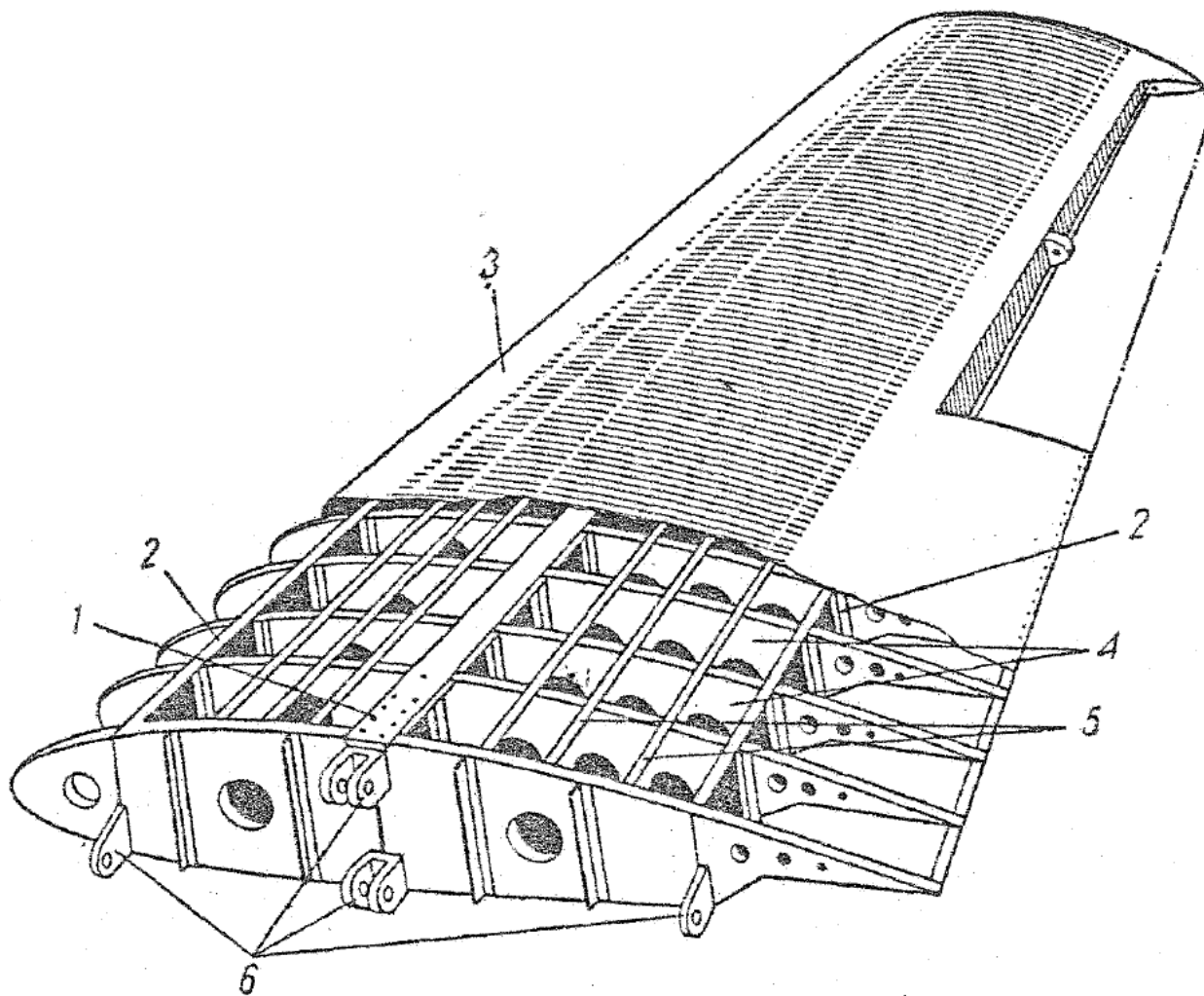
5) bryły zwarte



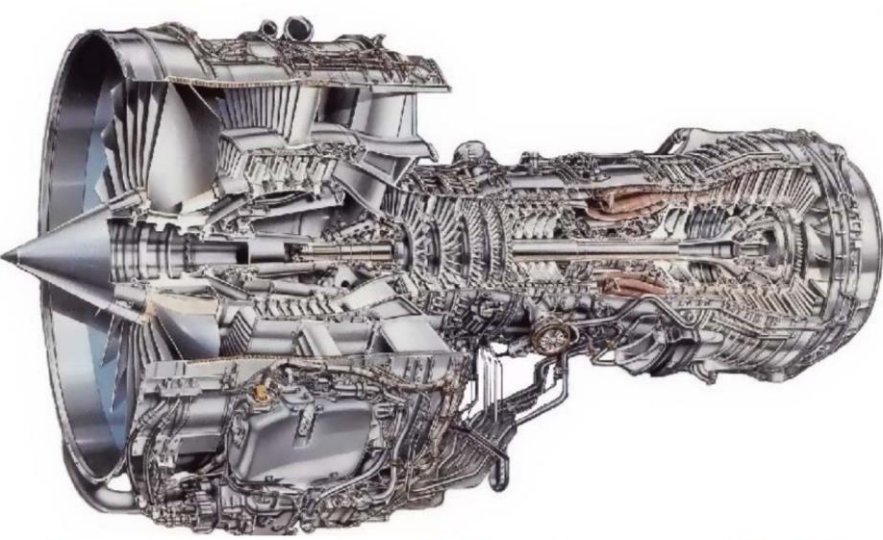
Rys. 1.1. Podział konstrukcji na typowe elementy



Rys. 1.1. Podział konstrukcji na typowe elementy

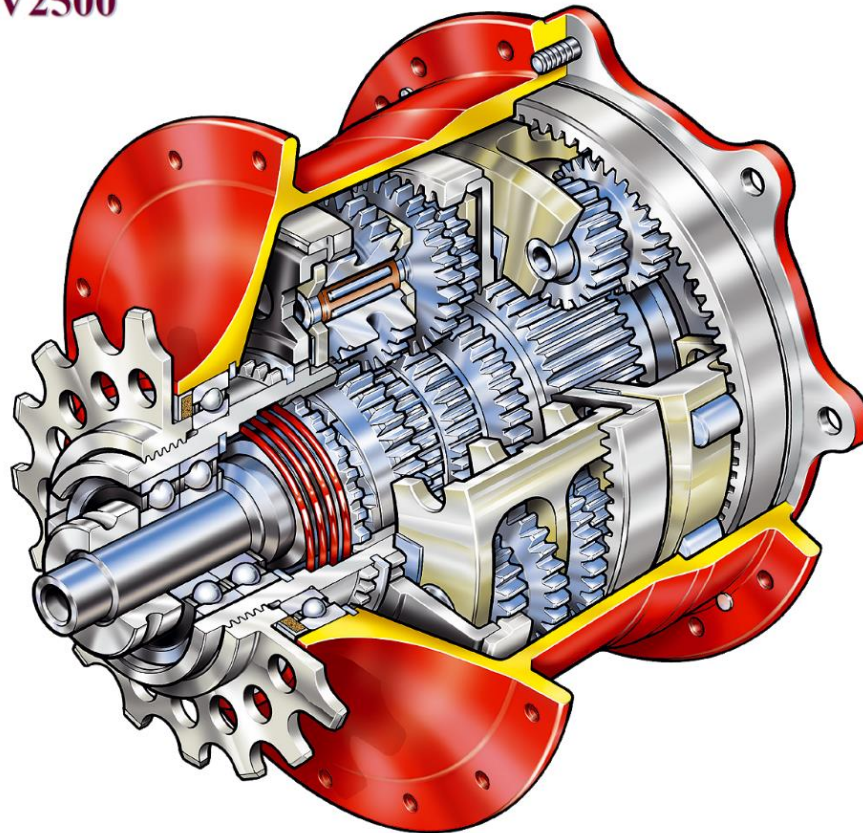


Rys. 5.44. Przykład jednodźwigarowej metalowej konstrukcji skrzydła z powłoką współpracującą, tworzącą komorę podwójną — o przekroju dwuobwodowym  
 1 — dźwigar, 2 — ścianka przegrodowa, 3 — powłoka (sztywna), 4 — żebra, 5 — usztywnienia  
 wzdłużne, 6 — okucie



## Dwuprzepływowy silnik odrzutowy V2500

Ciąg: od: 97 kN, do 145 kN

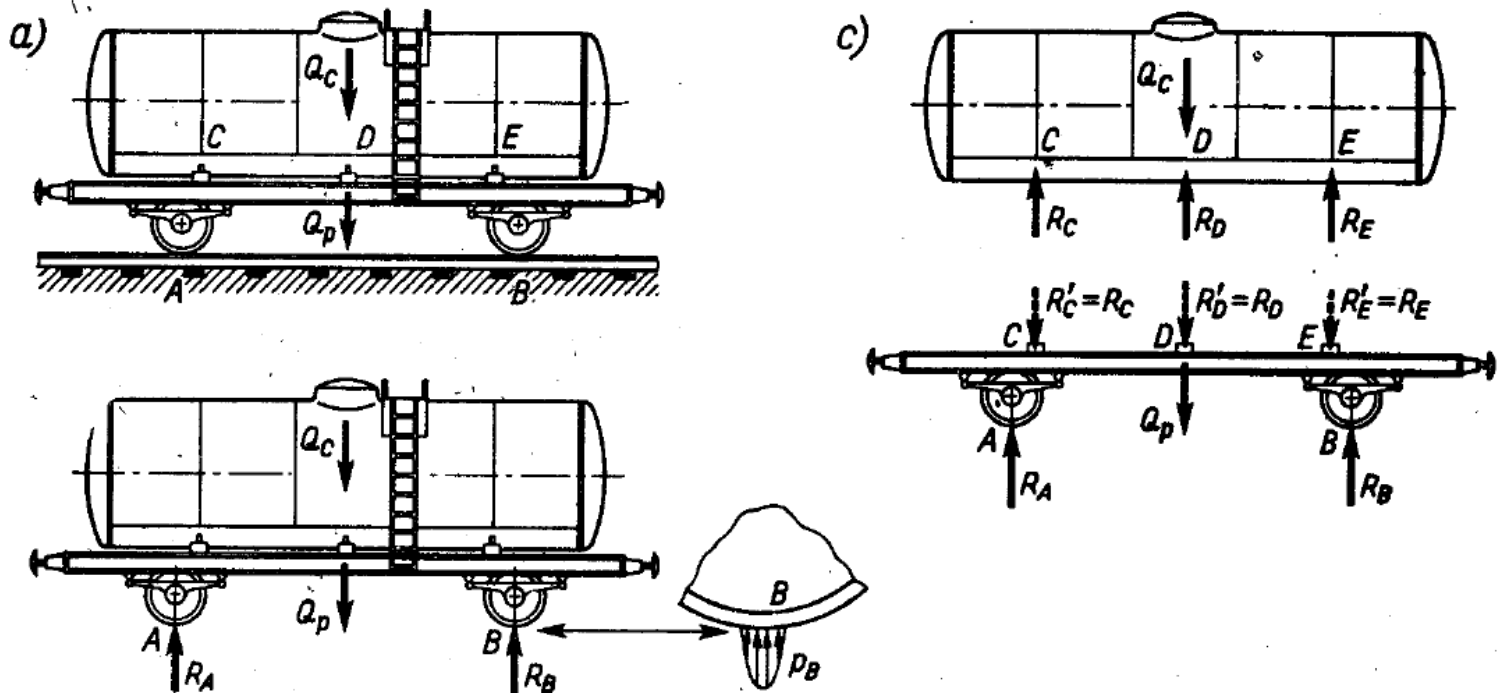


# Obciążenia konstrukcji

Miarą mechanicznego oddziaływania ciał na siebie są siły

## Siły zewnętrzne:

- objętościowe (ciężar, siły bezwładności)
- powierzchniowe (np.: ciśnienie, naciski w obszarze kontaktu)
- czynne
- bierne (reakcje)



Rys. 1.2. Określenie obciążenia konstrukcji

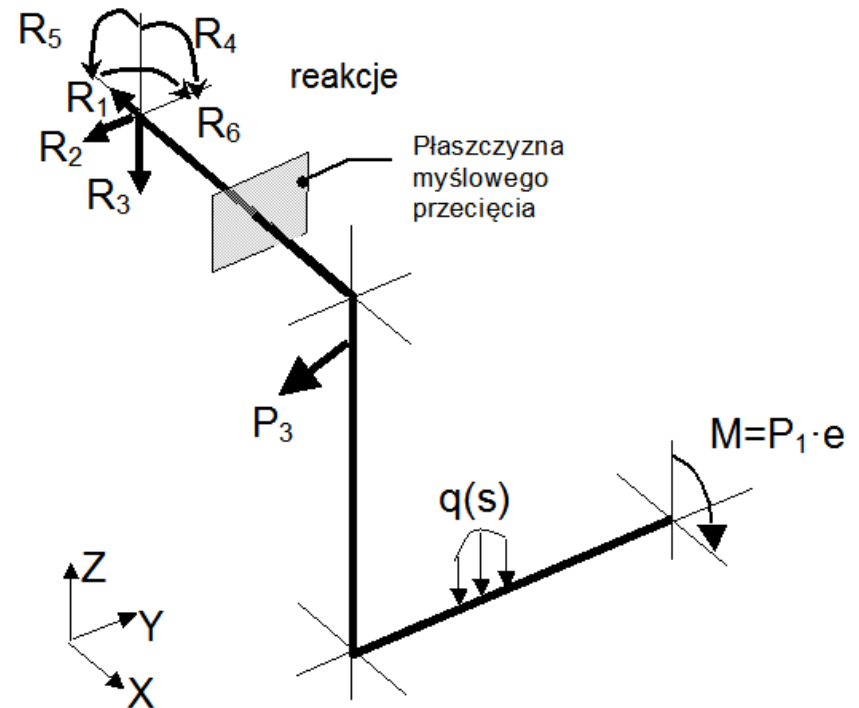
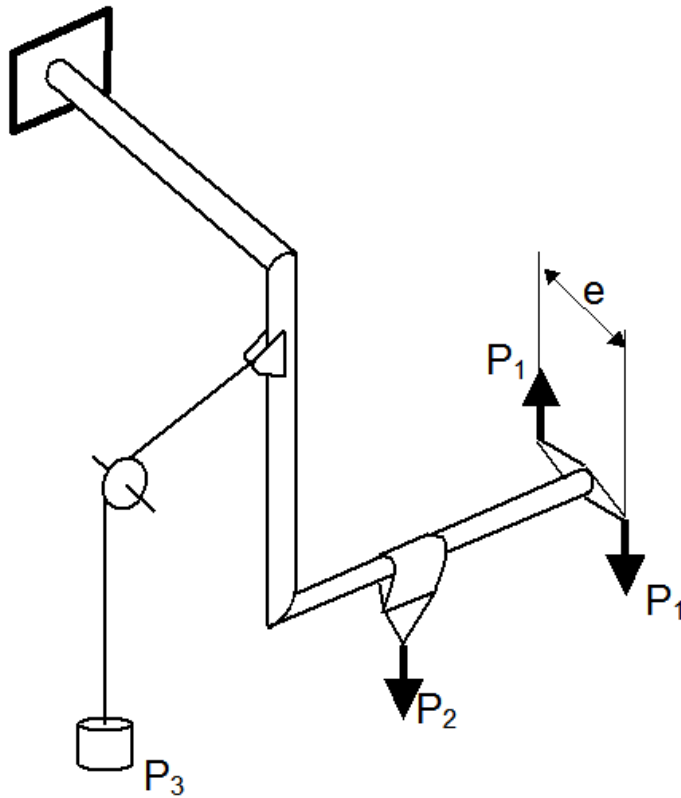


# Tworzenie modelu obliczeniowego

Model rzeczywisty



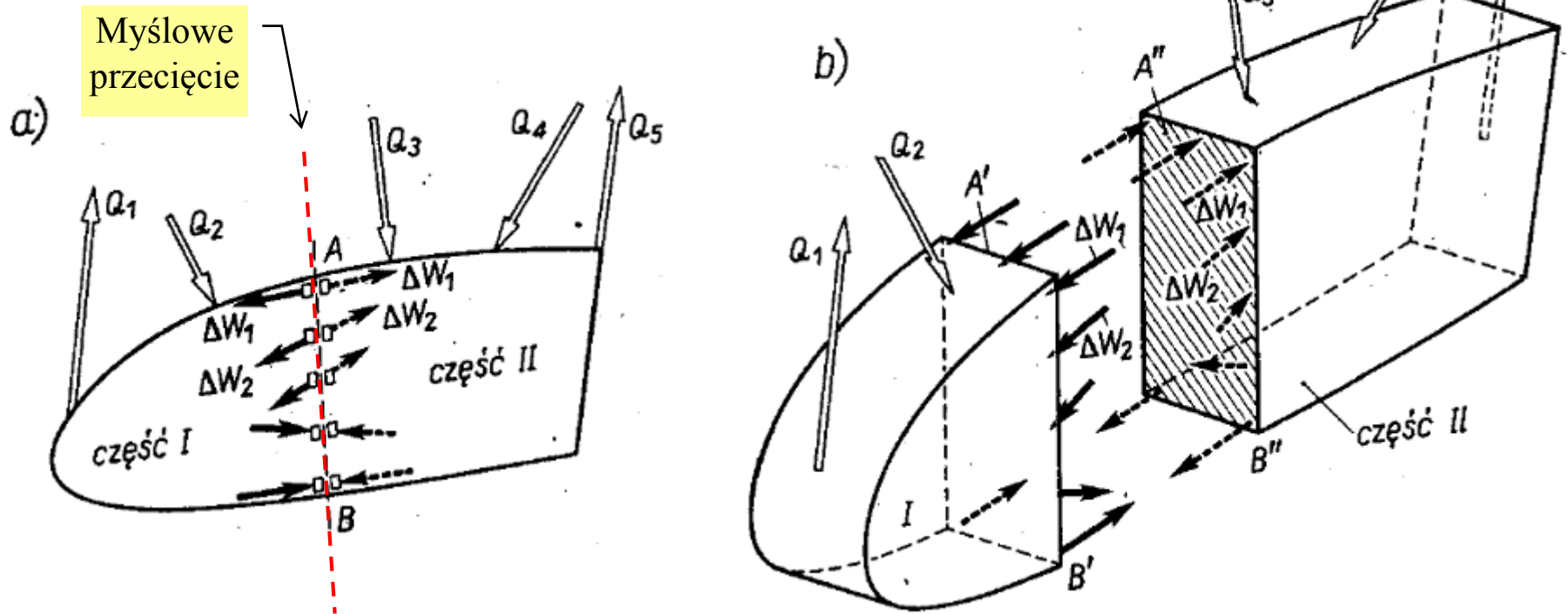
Model obliczeniowy



# Obciążenia konstrukcji

## Siły wewnętrzne:

*Siły działające w obrębie analizowanego obiektu  
nie będące siłami zewnętrznymi*



## Ujawnienie sił wewnętrznych

Siły  $\Delta W$  (ciągłe strzałki) działania cząstek części II na odpowiadające im cząstki części I;  
siły  $\Delta W$  (przerywane strzałki) działania cząstek części I na cząstki części II.

# Naprężenie

Naprężenie jest miarą intensywności obciążenia w przekroju

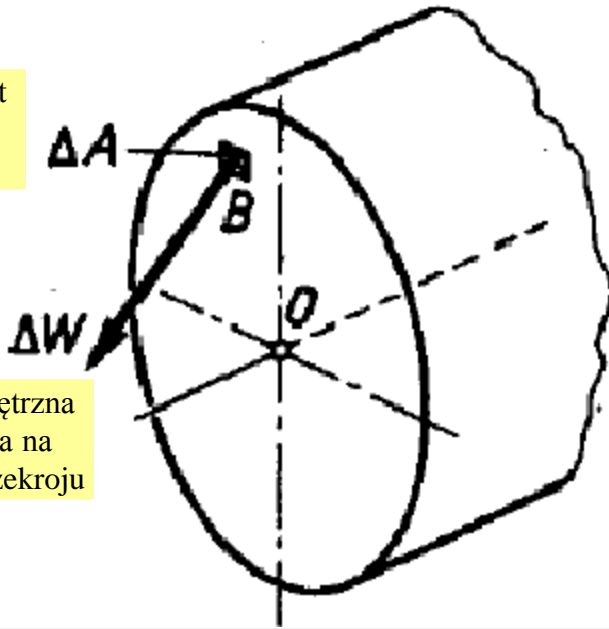
Naprężenie w punkcie to wartość do jakiej dąży stosunek siły  $\Delta W$  działającej na element  $\Delta A$  do pola tego elementu, gdy pole to dąży do zera

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta A} = \frac{dW}{dA}$$

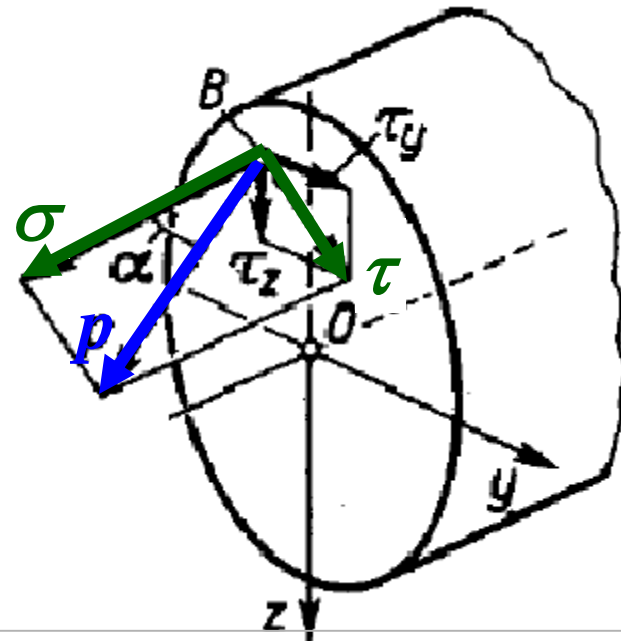
$\sigma = p \cdot \cos \alpha$  - naprężenia normalne

$\tau = p \cdot \sin \alpha$  - naprężenia styczne (tnące)

Mały element powierzchni przekroju

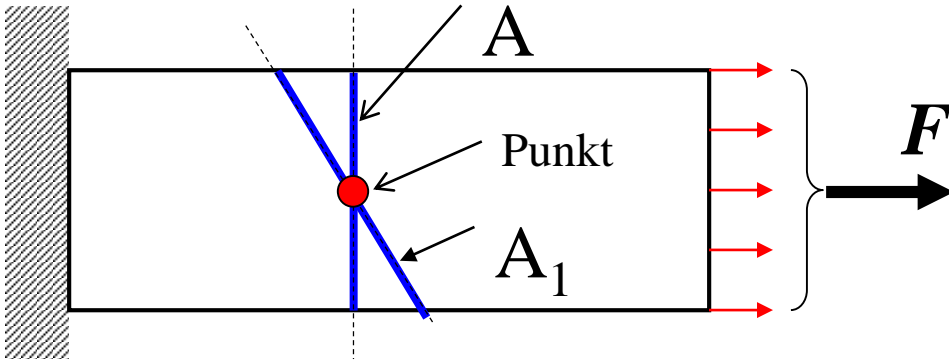


Siła wewnętrzna działająca na element przekroju



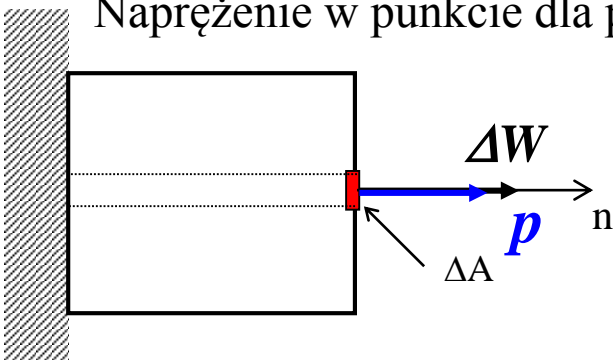
Wypadkowe naprężenia w punkcie można traktować jako wektor tylko wtedy, gdy ustalona jest płaszczyzna przekroju.

# Stan naprężenia w punkcie



Rozważmy cieką tarczę prostokątną umocowaną jednym końcem i obciążoną równomiernie na przeciwległym brzegu siłą rozciągającą  $F$

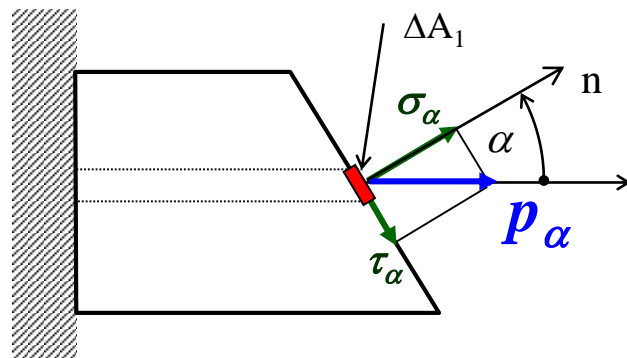
Naprężenie w punkcie dla przekroju  $A$ :



$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta A} = \frac{F}{A}$$

$$\begin{cases} \sigma = p \cos 0^\circ = p & \text{(napr. normalne)} \\ \tau = p \sin 0^\circ = 0 & \text{(napr. styczne)} \end{cases}$$

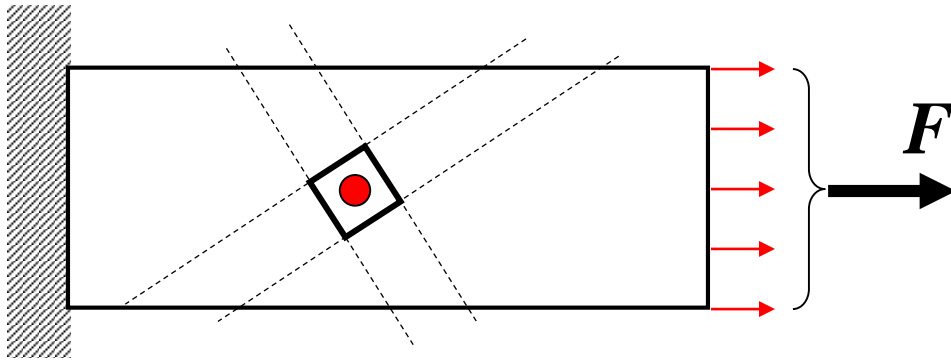
Naprężenie w punkcie dla przekroju  $A_1$ :



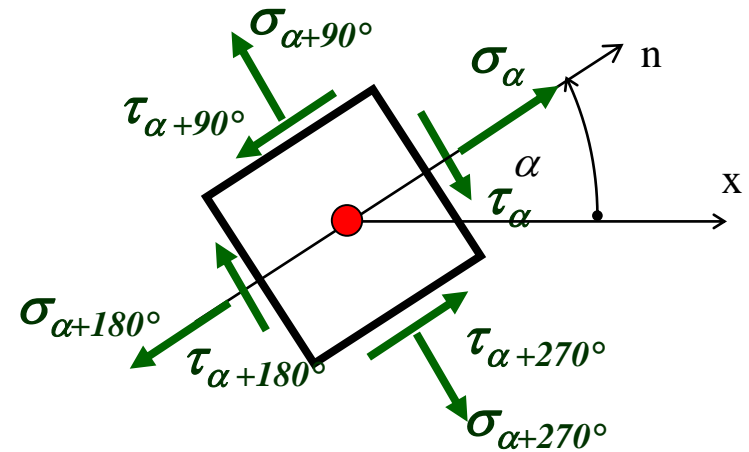
$$p_\alpha = \lim_{\Delta A_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta A_1} = \frac{F}{A} \cos \alpha$$

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = p_\alpha \cos \alpha = p \cos^2 \alpha \\ \tau_\alpha = p_\alpha \sin \alpha = p \cos \alpha \sin \alpha \end{cases}$$

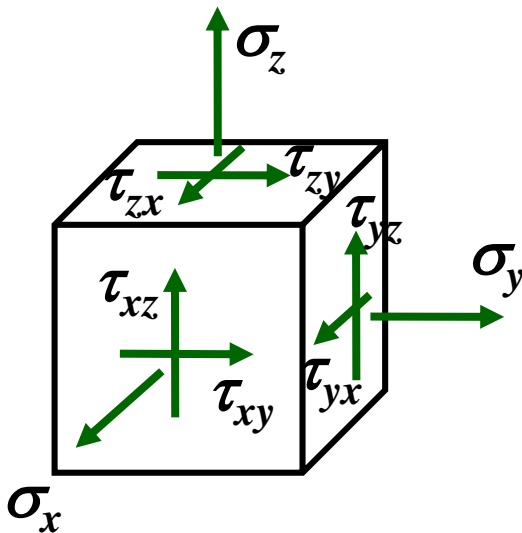
# Naprężenie jako tensor



Jeśli wytniemy wokół punktu kostkę, pod kątem  $\alpha$ :



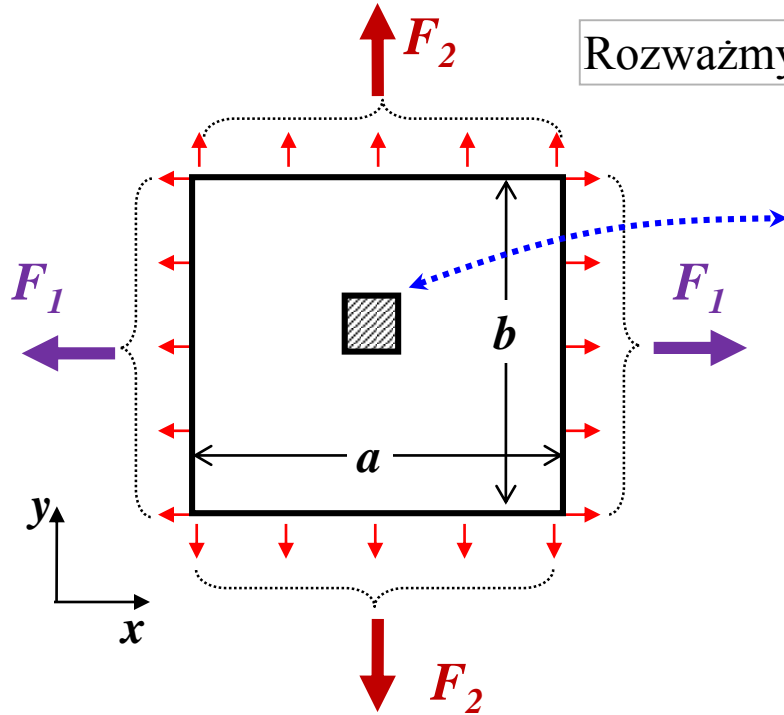
Stan naprężenia w punkcie opisany jest matematycznie przez tensor rzędu II



$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

# Analiza Płaskiego Stanu Naprężenia (PSN)

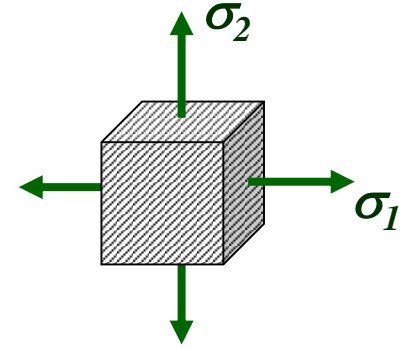
Rozważmy cieką tarczę o grubości  $\delta$  rozciągana siłami  $F_1$  i  $F_2$



Stan naprężenia w dowolnym punkcie tarczy przedstawimy na myślowo wyciętej kostce:

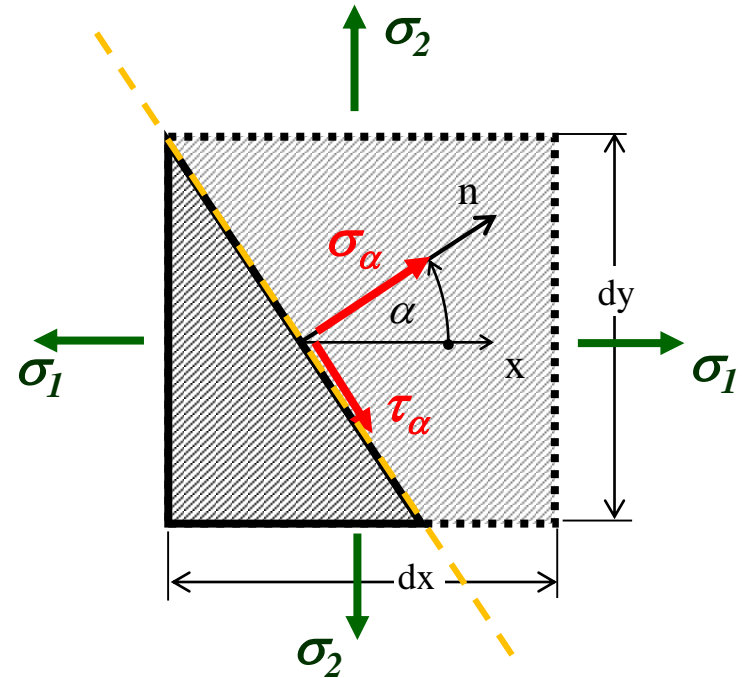
$$\sigma_1 = \frac{F_1}{b \cdot \delta}$$

$$\sigma_2 = \frac{F_2}{a \cdot \delta}$$

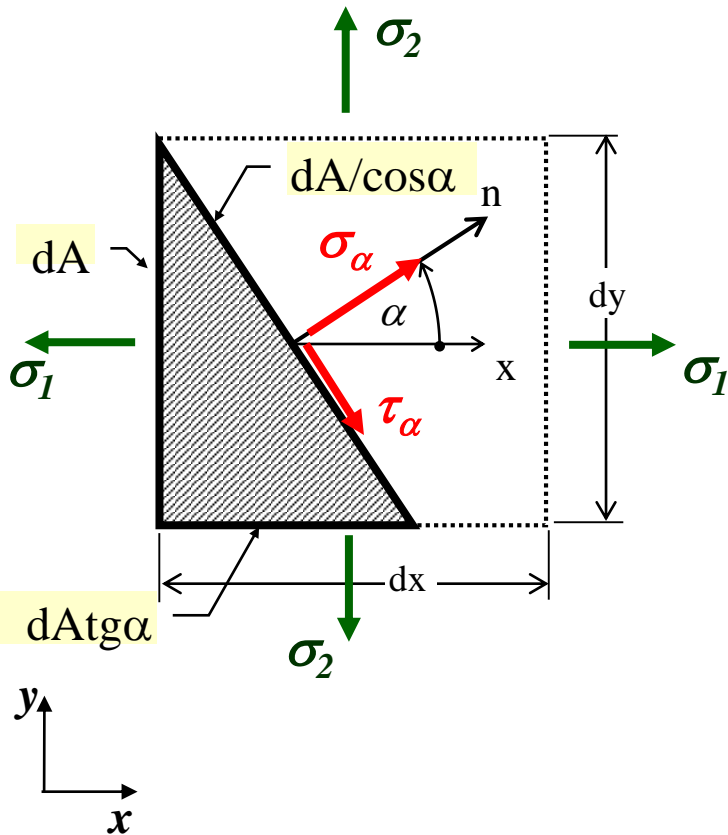


Przetnijmy tę kostkę płaszczyzną o normalnej pod kątem  $\alpha$  do kierunku  $x$

W płaszczyźnie tej ukażemy składową normalną  $\sigma_\alpha$  i styczną  $\tau_\alpha$  stanu naprężenia



# Analiza Płaskiego Stanu Naprężenia (PSN)



Równanie równowagi na oś  $x$ :

$$-\sigma_1 \cdot dA + \sigma_\alpha \cdot \frac{dA}{\cos\alpha} \cdot \cos\alpha + \tau_\alpha \cdot \frac{dA}{\cos\alpha} \cdot \sin\alpha = 0$$

$$\frac{dA}{\cos\alpha} \cdot (-\sigma_1 \cdot \cos\alpha + \sigma_\alpha \cdot \cos\alpha + \tau_\alpha \cdot \sin\alpha) = 0$$

$$-\sigma_1 \cdot \cos\alpha + \sigma_\alpha \cdot \cos\alpha + \tau_\alpha \cdot \sin\alpha = 0 \quad (1)$$

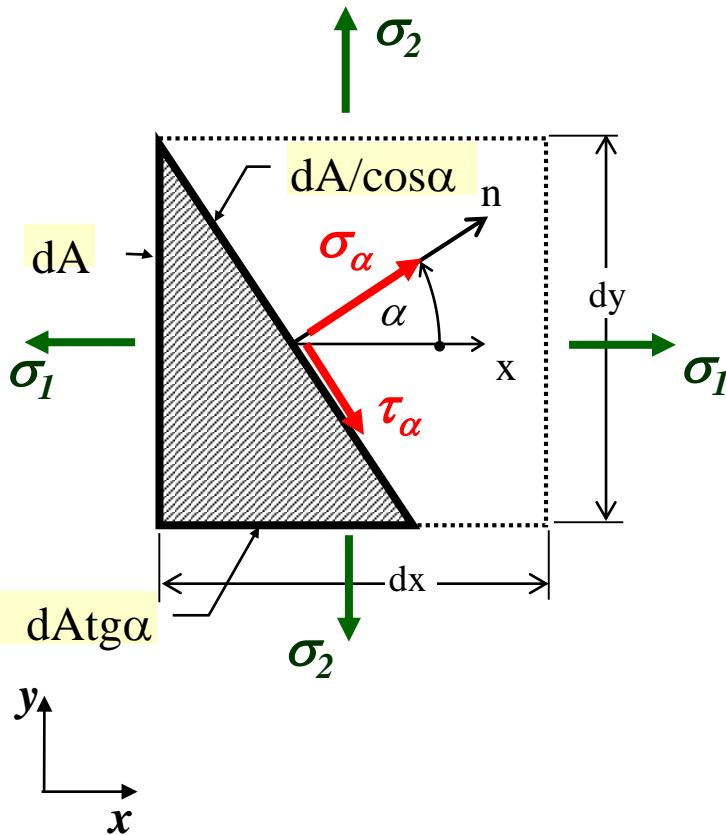
Równanie równowagi na oś  $y$ :

$$-\sigma_2 \cdot dA \cdot \operatorname{tg}\alpha + \sigma_\alpha \cdot \frac{dA}{\cos\alpha} \cdot \sin\alpha - \tau_\alpha \cdot \frac{dA}{\cos\alpha} \cdot \cos\alpha = 0$$

$$\frac{dA}{\cos\alpha} \cdot (-\sigma_2 \cdot \sin\alpha + \sigma_\alpha \cdot \sin\alpha - \tau_\alpha \cdot \cos\alpha) = 0$$

$$-\sigma_2 \cdot \sin\alpha + \sigma_\alpha \cdot \sin\alpha - \tau_\alpha \cdot \cos\alpha = 0 \quad (2)$$

# Analiza Płaskiego Stanu Naprężenia (PSN)



$$-\sigma_1 \cdot \cos \alpha + \sigma_\alpha \cdot \cos \alpha + \tau_\alpha \cdot \sin \alpha = 0 \quad (1)$$

$$-\sigma_2 \cdot \sin \alpha + \sigma_\alpha \cdot \sin \alpha - \tau_\alpha \cdot \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

$$(1) \cdot \cos \alpha + (2) \cdot \sin \alpha :$$

$$-\sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_\alpha \cdot \cos^2 \alpha + \tau_\alpha \cdot \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

$$-\sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha + \sigma_\alpha \cdot \sin^2 \alpha - \tau_\alpha \cdot \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$-(1) \cdot \sin \alpha + (2) \cdot \cos \alpha :$$

$$\sigma_1 \cdot \cos \alpha \sin \alpha - \sigma_\alpha \cdot \cos \alpha \sin \alpha - \tau_\alpha \cdot \sin^2 \alpha = 0$$

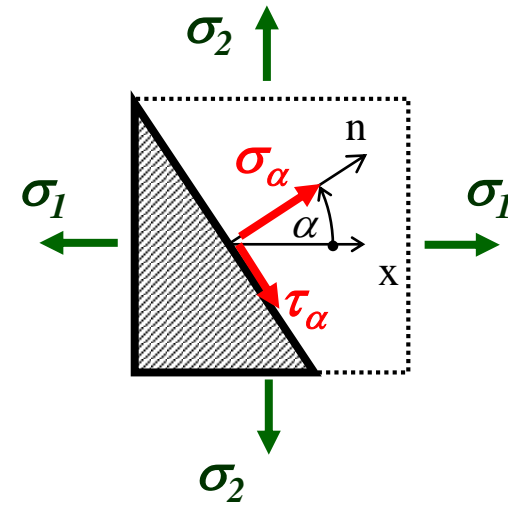
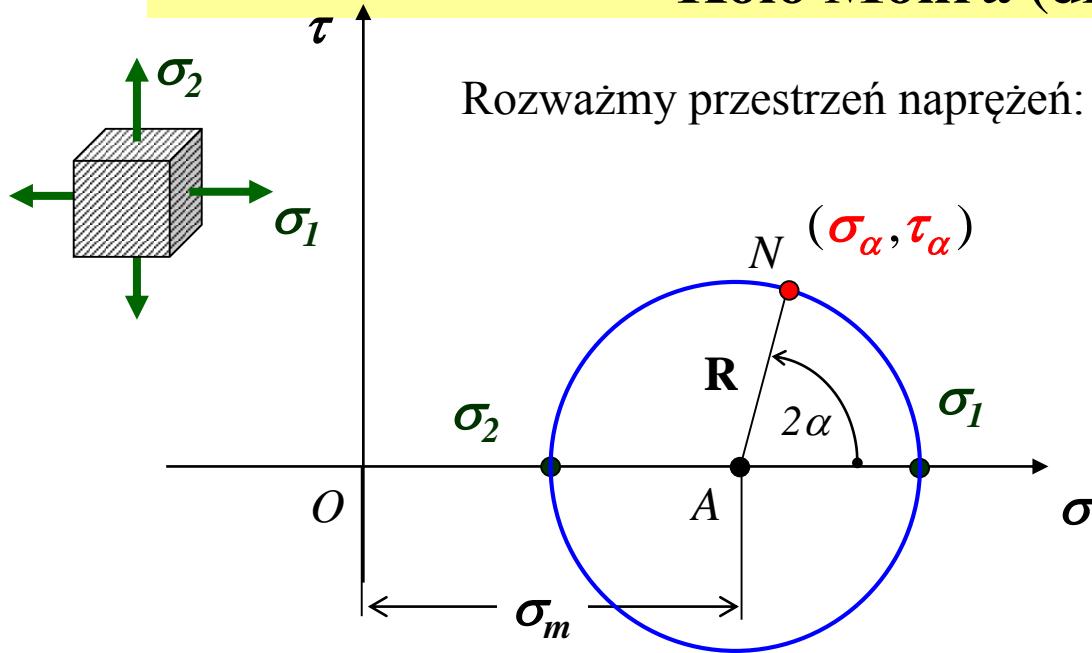
$$-\sigma_2 \cdot \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_\alpha \cdot \cos \alpha \sin \alpha - \tau_\alpha \cdot \cos^2 \alpha = 0$$

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \sin 2\alpha$$

Uzyskaliśmy wzory transformacyjne przejścia od naprężeń głównych ( $\sigma_1, \sigma_2$ ) do składowych stanu naprężenia na ściance o kierunku normalnej  $\alpha$  do kierunku 1: ( $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$ )



# Koło Mohra (dla PSN)



Sprawdzamy wzory transformacyjne:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_m + R \cdot \cos 2\alpha$$

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_1}{2} (1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \frac{\sigma_2}{2} \cdot (1 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)$$

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

$$R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

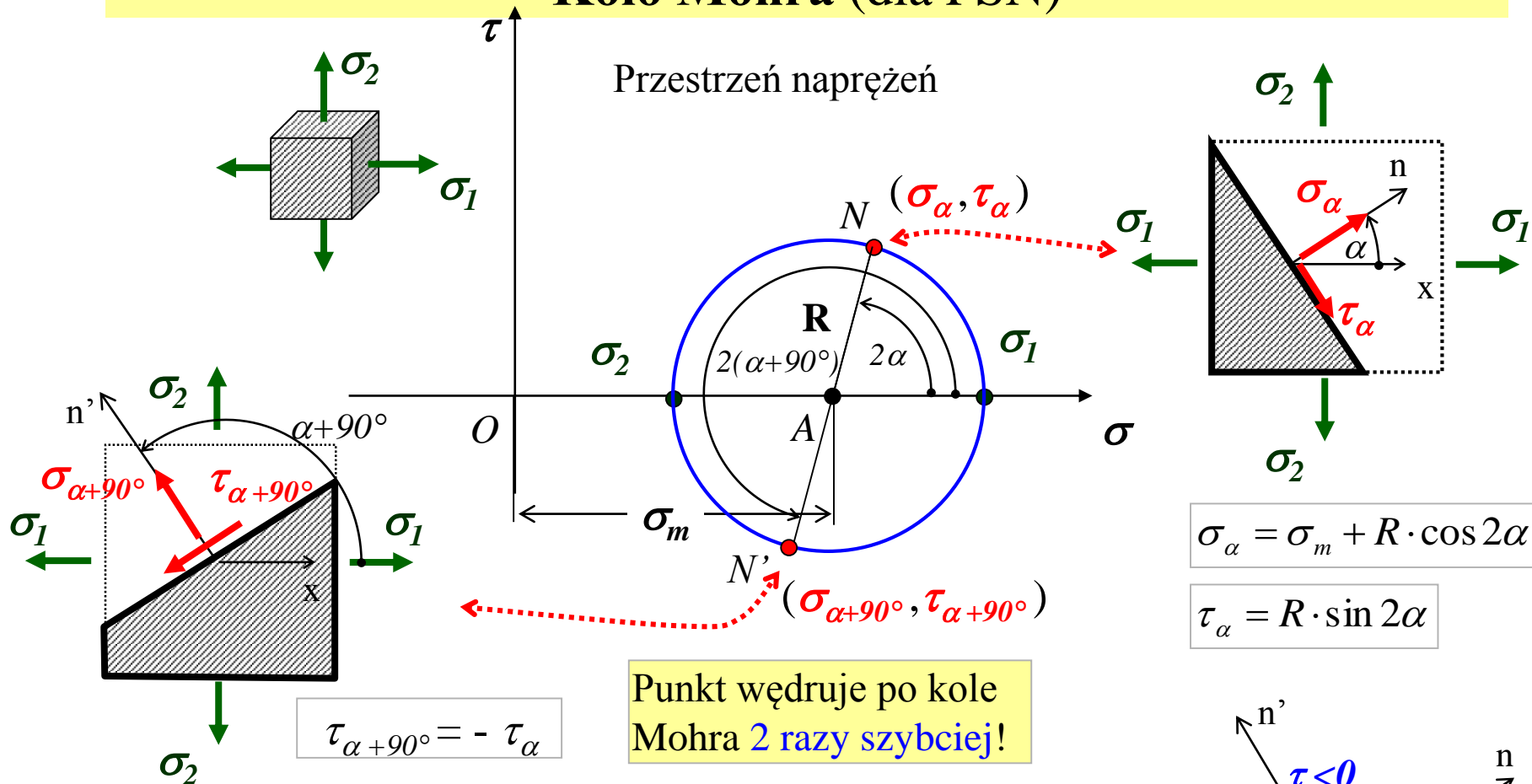
$$\tau_{\alpha} = R \cdot \sin 2\alpha$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \sin 2\alpha$$

Wyszło to samo co we wzorach transformacyjnych!

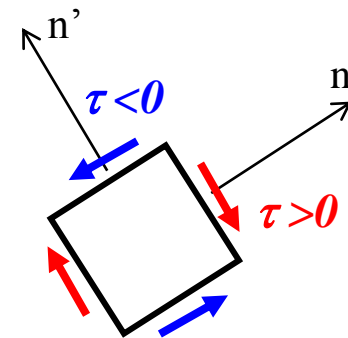
*Punkt N reprezentuje więc stan naprężenia dla przekroju o normalnej w kierunku  $\alpha$  do kierunku 1*

# Koło Mohra (dla PSN)



## Właściwości PSN:

- 1) Istnieją tylko 2 przekroje takie, że  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  i wtedy  $\tau_\alpha=0$  (**naprężenia główne** w kierunkach prostopadłych do siebie – kierunki główne)
- 2) Dla  $\sigma_1 > \sigma_2$  musi być:  $\sigma_1 \geq \sigma_\alpha \geq \sigma_2$
- 3) Ekstremalne naprężenia tnące  $\tau_{max}$  wystąpią w przekroju  $\alpha=45^\circ$  względem kierunków głównych



Konwencja znaku naprężeń tnących na kole Mohra